

UE 2 du D.S.C.G – Finance

Module 4 – La valeur et les titres financiers

Sommaire

Chapitre 1 – La valeur fondamentale d'un actif financier	3
Chapitre 2 – La valeur des obligations	5
Section 1 – Les paramètres d'une obligation	5
Section 2 – Le taux actuariel brut (T.A.B) d'une obligation	6
A) Définition du taux actuariel	6
B) Mode de calcul du taux actuariel	6
C) Exemple	7
Section 3 – Relation entre le taux du marché et le prix des obligations	9
A) Expression du prix de l'obligation en fonction du taux du marché	9
1) Mode de calcul de la cote d'une obligation	9
2) Exemple	9
3) Le problème des intérêts courus et de leur cotation	10
B) Sensibilité d'une obligation	12
1) Définition de la sensibilité d'une obligation	12
2) Expression mathématique de la sensibilité d'une obligation	12
3) Exemple de calcul de la sensibilité d'une obligation	12
C) Duration	14
1) Définition et calcul	14
2) Analogie entre duration et délai de récupération	14
3) Relation entre duration et sensibilité	16
Section 4 – Les risques obligataires	18
A) Le risque de taux	18
B) Le risque de crédit	19
1) Le risque de défaut.	19
2) Le risque de spread.	19
3) Le risque de dégradation.	19
C) La notation des emprunts obligataires	19
Section 5 – Détermination du prix d'émission théorique d'une obligation	21
A) Principe	21
B) Calcul des taux spot	21
C) Application	22
Chapitre 3 – La valeur des titres de créances négociables	23
Section 1 – Rappel des principales caractéristiques des T.C.N	23
Section 2 – Valeur et taux de placement des T.C.N	24
Section 3 – Application	26
Chapitre 4 – La valeur des actions	29
Section 1 – Le modèle général du dividende actualisé (M.D.A)	30
A) Principe	30
B) Exemple	30
Section 2 – Le modèle du dividende actualisé à croissance unique	32
A) Principe	32

B) Exemple	32
C) L'estimation du taux de croissance "g"	33
1) Principe	33
2) Exemple	33
Section 3 - Le modèle du dividende actualisé à croissance multiple	37
A) Principe	37
B) Exemple	37
Section 4 - La valeur des opportunités de croissance	35
A) Principe	35
B) La valeur actuelle des opportunités de croissance (V.A.O.C)	35
1) Principe	35
2) Exemple	36
Chapitre 5 – Les options sur actions et leur valeur	37
Section 1 – Généralité sur les contrats d'options	37
A) Rappel de la définition générale d'un marché à terme	37
B) Le principe des options	37
1) Définition d'une option	37
2) Les différentes sortes d'options	37
3) Rôle des options	38
Section 2 – Les contrats d'options d'actions sur les marchés organisés	39
A) L'organisation des contrats d'options sur actions	39
B) Le principe des contrats d'options sur les marchés organisés	39
1) Description d'un contrat d'option négociable	39
2) L'utilisation des options sur action	39
a) Les différentes possibilités pour un acheteur d'option sur actions	39
b) Les différentes possibilités pour un vendeur d'option sur actions	40
c) Les différentes utilisations d'option sur actions	40
3) Position relative du prix d'exercice et du cours de l'actif sous-jacent	40
a) Principe	40
b) Synthèse	41
c) Illustration	41
C) Exemple simple	42
1) Analyse de la situation	42
2) Les différentes positions pour l'acheteur de l'option d'achat	42
a) 1 ^{er} cas : L'acheteur peut exercer son option d'achat	42
b) 2 ^{ème} cas : L'acheteur peut abandonner son option d'achat	42
c) 3 ^{ème} cas : l'acheteur peut revendre son option avant la date d'échéance	42
3) La position du vendeur de l'option d'achat	42
a) 1 ^{er} cas : L'acheteur exerce son option d'achat avant la date d'échéance	42
b) 2 ^{ème} cas : L'acheteur abandonne son option d'achat	42
D) Synthèse de la position des différents acteurs et résultats obtenus	43
1) L'acheteur d'une option	43
2) Le vendeur d'une option	44
E) Représentations graphiques du résultat obtenu par les différents acteurs	45
Section 3 – La décomposition de la valeur de la prime	46
A) Principe	46
B) La valeur intrinsèque	46
C) La valeur spéculative (valeur temps)	46
Section 4 - La valeur des options sur actions à l'échéance	47
A) Valeur de l'option d'achat à l'échéance	47
B) Valeur de l'option de vente à l'échéance	48
Section 5 - Les propriétés de base des options sur actions	50
A) Les différents paramètres déterminant la valeur d'une option sur actions	50
1) La valeur actuelle de l'action sous-jacente (S_0)	50
2) La volatilité de la valeur de l'action sous-jacente (σ)	50
3) Le prix d'exercice de l'option (K)	50

4) Le taux sans risque annuel (r)	50
5) Le temps jusqu'à l'échéance, en années (τ)	50
6) Le dividende	51
7) Synthèse	51
B) Les relations de base	51
C) La relation de parité call-put en temps discret et en temps continu permettant donc de déterminer la valeur du call ou du put	53
Section 6 - Les modèles de valorisation des options	55
A) Principe	55
B) Le modèle binomial	55
1) Principe général du modèle binomial	55
2) Le modèle binomial à une période	56
a) Exemple d'évaluation d'une option par arbitrage	56
b) Généralisation du modèle binomial, à une période, en évaluant l'option avec risque neutre en temps continu	57
c) Valeur espérée de l'action en univers "risque neutre"	58
d) Synthèse de la valeur d'une option en univers "risque neutre"	59
3) Le modèle binomial à plusieurs périodes	59
a) Principe	59
b) Exemple	60
4) L'évaluation binomiale des options américaines	61
C) Le modèle Black et Scholes	62
1) Principe	62
2) Valeur d'une option d'achat selon la formule de Black et Scholes	62
3) Exemple	63
4) Valeur d'une option de vente	64
a) Relation entre la valeur de l'option d'achat et la valeur de l'option de vente.	64
b) Application à la valeur d'une option de vente	65
Section 7 - L'estimation de la volatilité	67
A) Principe	67
B) Exemple	67
Section 8 – Les "grecs" – Mesure de la sensibilité des options	69
A) Principe	69
B) Le delta (Δ)	69
1) Définition du delta	69
2) Exemple	69
C) Le gamma (Γ)	69
1) Définition du gamma	69
2) Exemple	70
D) Le thêta (θ)	70
E) Le Véga (ϖ)	70

Chapitre 2 – La valeur des obligations

Préambule

Les obligations (bonds en anglais) sont des titres négociables conférant les mêmes droits de créance pour une même valeur nominale.

Les obligations rapportent un intérêt fixe (le plus souvent) ou variable.

À date fixe, l'obligataire perçoit l'intérêt (ou coupon) annuel.

L'emprunt obligataire peut être remboursé en totalité à la fin (*in fine*), par amortissements constants ou par annuités constantes.

Dans la pratique, les grandes émissions obligataires font l'objet d'un remboursement *in fine* afin de garantir un revenu fixe à chaque obligataire, sur toute la durée de l'emprunt, ainsi qu'une durée de placement fixe.

Lorsque l'emprunt n'est pas remboursé en totalité à l'échéance mais par fractions au cours du temps, on tire au sort chaque année des séries d'obligations qui sont alors remboursées.

Remarque :

Le mot "coupon" est un souvenir de l'époque (avant la dématérialisation) où l'intérêt était payé contre remise d'un coupon en papier découpé sur le titre.

Section 1 – Les paramètres d'une obligation

- Prix d'émission.

Le prix d'émission est le prix auquel l'obligation est proposée, par l'émetteur, au souscripteur (à l'obligataire) lors de l'émission.

Si le prix d'émission est égal à la valeur nominale, l'obligation est dite "au pair".

L'émission est au-dessous du pair si le prix d'émission est inférieur à la valeur nominale.

- Valeur de remboursement et prime de remboursement.

L'obligation est remboursée à son échéance, soit à la valeur nominale (au pair), soit à un prix supérieur à la valeur nominale (au-dessus du pair).

Remarque

D'un point de vue comptable, la prime d'émission correspond à la différence entre le prix de remboursement et le prix d'émission.

- Durée ou maturité de l'emprunt (Maturity)

La durée de l'emprunt est le temps compris entre la date de jouissance (date à laquelle les intérêts commencent à courir) et le dernier remboursement.

Actuellement, la durée dépasse rarement huit ans.

Toutefois, en 1993, Walt Disney Co. a cependant émis un emprunt ayant une maturité (une durée) de 100 ans.

- Le taux nominal ou facial (Yield of interest rate)

C'est le taux d'intérêt théorique fixé au moment de l'émission de l'emprunt.

Il peut être fixe, c'est-à-dire reste inchangé pendant toute la durée de vie de l'obligation.

Il peut être variable, en fonction d'un indice de référence pris sur le marché monétaire ou financier.

Remarque.

En France, les intérêts sur obligations (sauf le cas particulier des obligations à taux zéro) sont versés une fois par an.

Aux États Unis, ils ont versés semestriellement.

Section 2 - Le taux actuariel brut (T.A.B) d'une obligation

A) Définition du taux actuariel

Le taux actuariel brut (*yield to maturity* - YTM) représente le taux de rendement de l'obligation pour celui qui l'achète aujourd'hui et la conserve jusqu'à la date d'échéance.

Ce taux peut donc se calculer à l'émission mais également à tout moment après.

À l'émission, le taux actuariel est différent du taux nominal si l'émission et/ou le remboursement ne se font pas au pair.

Ce taux actuariel se calcule comme étant le taux qui égalise le prix à payer (donc intérêts courus inclus) et la valeur actualisée des coupons et du prix de remboursement (PR).

Du fait de la concurrence, les taux actuariels bruts des emprunts émis par les sociétés à une date donnée sont sensiblement égaux entre eux.

Ces taux définissent le taux du marché financier à cette date.

Remarque

L'épithète actuariel signifie que le calcul utilise les méthodes mathématiques d'actualisation en usage dans la profession d'actuaire.

L'épithète brut signifie que les flux actualisés sont définis avant prélèvement fiscal.

B) Mode de calcul du taux actuariel

En désignant par :

$P \Rightarrow$ Le prix d'émission de l'obligation (ou la cote selon le cas) ;

$V \Rightarrow$ La valeur nominale ;

$i \Rightarrow$ Le taux d'intérêt ;

$n \Rightarrow$ La durée de vie ;

$k \Rightarrow$ Le rang de l'échéance d'un coupon ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) ;

$PR \Rightarrow$ La valeur de remboursement in fine ;

Alors "r" le taux actuariel brut, est obtenu en résolvant l'équation suivante :

$$\Rightarrow \text{Prix de l'obligation} = \left[\sum_{k=1}^{k=n} i * V * (1 + r)^{-k} \right] + PR * (1 + r)^{-n}$$

Remarque

On peut calculer le T.A.B à n'importe quel moment de la vie d'une obligation (à l'émission ou à une autre date). Le principe reste toujours le même.

Si l'on se situe à l'émission, le prix de l'obligation = Prix d'émission.

Si l'on se situe à une autre date, prix de l'obligation = Cote de l'obligation à cette même date.

C) Exemple

Des obligations de valeur nominale 1 000,00 € sont émises le 15 octobre N au prix d'émission de 990,00 €.

Le taux facial (ou nominal) est de 5%.

Les coupons (les intérêts) sont payés le 30 septembre de chaque année.

Les obligations sont remboursables in fine (le 1/10/N+5) au prix de 1 020,00 €.

La date de jouissance est le 1^{er} octobre N, soit 15 jours avant l'émission.

La durée de l'emprunt est de 5 ans.

Conséquences :

Le 15/10/N, l'obligataire règle le prix d'émission => 990,00 €

Les 1/10/N+1, N+2, N+3, N+4, l'obligataire percevra un coupon de => $1\,000,00 \times 0,05 = 50,00$ €.

Le 1/10/N+5, l'obligataire va percevoir son dernier coupon et le prix de remboursement
=> $50,00 + 1\,020,00 = 1\,070,00$ €

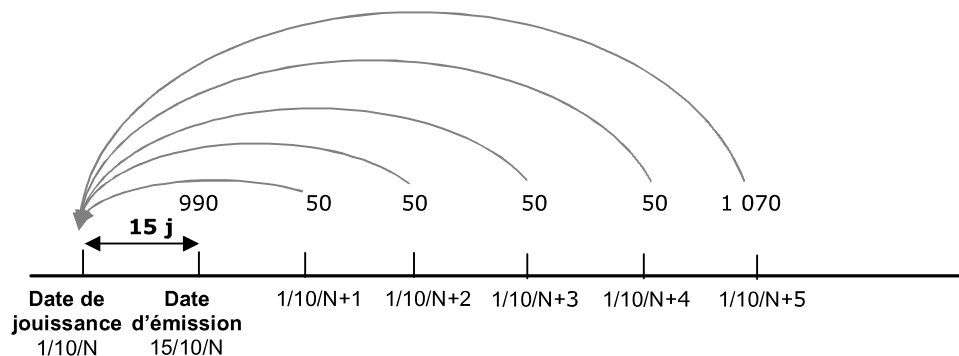
On peut aussi dire que l'obligataire percevra cinq fois 50,00 € et une fois 1 020,00 €.

Pour trouver le taux actuariel brut (T.A.B) il existe mathématiquement plusieurs solutions équivalentes.

- 1^{ère} solution

Nous allons calculer le T.A.B en nous situant le 1/10/N (date de jouissance de l'EO).

On peut schématiser le problème ainsi :



Bien comprendre que si on actualise les 5 annuités constantes de 50 € et l'annuité de 1 020,00 € (ou si vous préférez, on actualise 4 annuités constantes de 50,00 € et une annuité constante de 1 070,00 €), la date à laquelle on actualise se situe une période (un an) avant le versement de la 1^{ère} annuité.

Le 1^{er} versement d'intérêt intervenant le 1/10/N+1, la valeur actuelle des 5 versements se situe donc un an avant, soit le 1/10/N.

Mais comme il faut comparer ce qui est comparable en terme de date, il faut donc dans ce cas ramener le prix d'émission (990,00 €) aussi le 1/10/N.

Le taux actuariel brut "r" est donc la racine (la solution) de l'équation suivante :

$$\Rightarrow 990,00 * (1 + r)^{-\frac{15}{365}} = 50,00 * \left[\frac{1 - (1 + r)^{-5}}{r} \right] + 1\,020,00 * (1 + r)^{-5}$$

Le taux actuariel "r" est de 5,6% (résolution avec des extraits de tables financières; avec une calculatrice ou par interpolation linéaire).

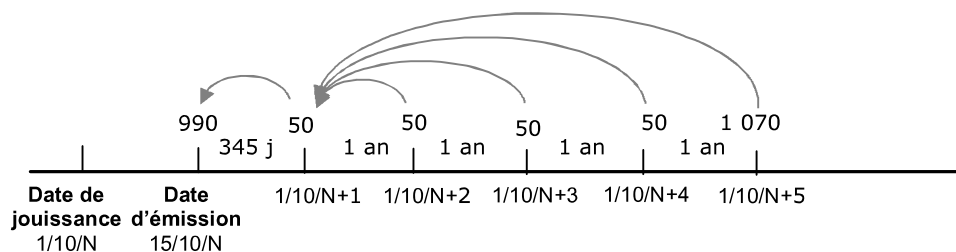
Rappel.

Dans le module 1, Chapitre 1, vous disposez de cas pratiques dans lesquels la résolution par interpolation linéaire est expliquée (ainsi que dans les cas pratiques attachés à ce chapitre !).

- 2^{ème} solution

Nous allons calculer le T.A.B en nous situant le 15/10/N (autrement dit à la date d'émission).

On peut schématiser le problème ainsi :



Le taux actuariel brut "r" est donc la racine (la solution) de l'équation suivante :

$$\Rightarrow 990,00 = \underbrace{\left[50,00 + 50,00 * \frac{1 - (1 + r)^{-3}}{r} + 1\,070,00 * (1 + r)^{-4} \right]}_{\text{Actualisation le 1/10/N+1}} * (1 + r)^{-\frac{345}{365}} \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Actualisation le 15/10/N}}$$

Le taux actuariel "r" est de 5,6%.

Conclusion.

On constate que le taux actuariel brut est supérieur au taux facial.

L'émission au-dessous du pair, le remboursement au-dessus du pair, une date de jouissance antérieure à l'émission sont des facteurs de majoration du taux actuariel par rapport au taux nominal.

Section 3 - Relation entre le taux du marché et le prix des obligations

A) Expression du prix de l'obligation en fonction du taux du marché

1) Mode de calcul de la cote d'une obligation

Du fait de la concurrence entre les obligations anciennes et les nouvelles émissions, le taux de rendement des obligations anciennes et le taux actuariel des émissions nouvelles tendent à s'aligner.

Le taux commun est, par définition, le taux du marché des obligations.

Le prix des obligations sur le marché secondaire est donc égal à la valeur actualisée, au taux du marché, des flux monétaires futurs liés à l'emprunt.

En désignant par :

C => Le cours du titre sur le marché secondaire (la cote) ;

n => La durée de vie résiduelle de l'emprunt ;

F_k => Le flux de l'époque k ;

r => Le taux du marché du jour où l'on calcule la cote de l'obligation;

$$\Rightarrow \text{Cote de l'obligation} = \left[\sum_{k=1}^{k=n} F_k * (1 + r)^{-k} \right]$$

C'est une fonction décroissante du taux du marché (r) :

- lorsque le taux d'intérêt " r " augmente, le prix des obligations sur le marché secondaire diminue;
- lorsque le taux d'intérêt " r " diminue, le prix des obligations sur le marché secondaire augmente.

Remarque

Cette formule s'applique pour toutes les obligations rémunérées par un taux fixe.

Toutefois, il est plus rapide d'utiliser la formule suivante quand il s'agit d'obligations à taux fixe remboursable in fine relatif :

$$C = (i * VN) * \left[\frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} \right] + PR (1 + r)^{-n}$$

2) Exemple

Reprenons l'exemple précédent en nous plaçant deux ans plus tard, le 1^{er} octobre $N + 2$.

Calculons, à cette date, la valeur actuelle des coupons annuels futurs (50,00 € pendant encore trois ans) et du prix de remboursement (1 020,00 €).

Nous retiendrons d'abord l'hypothèse où le taux d'intérêt sur le marché est de 6% puis de 7%.

- Taux $r = 6\%$

1ère façon de trouver $C \Rightarrow C = 50 (1,06)^{-1} + 50 (1,06)^{-2} + 50 (1,06)^{-3} + 1\,020 (1,06)^{-3} \Rightarrow C = 990,06 \text{ €}$

2ème façon de trouver $C \Rightarrow C = (1\,000 * 0,05) * \left[\frac{1 - (1,06)^{-3}}{0,06} \right] + 1\,020 (1,06)^{-3} \Rightarrow C = 990,06 \text{ €}$

- Taux $r = 7\%$

1ère façon de trouver $C \Rightarrow C = 50 (1,07)^{-1} + 50 (1,07)^{-2} + 50 (1,07)^{-3} + 1\,020 (1,07)^{-3} \Rightarrow C = 963,83 \text{ €}$

2ème façon de trouver $C \Rightarrow C = (1\,000 * 0,05) * \left[\frac{1 - (1,07)^{-3}}{0,07} \right] + 1\,020 (1,07)^{-3} \Rightarrow C = 963,83 \text{ €}$

Conséquence :

Nous vérifions ainsi que le cours de l'obligation varie bien en sens inverse du taux du marché.

Si le taux du marché augmente, le détenteur d'une obligation qui serait pressé de la vendre, risque de percevoir un prix inférieur au prix de remboursement prévu à l'échéance.

Il supporte un risque de taux (d'intérêt).

Le risque de taux encouru par l'obligataire est mesuré par la sensibilité du titre ou par sa durée.

Remarque.

Dans le cas d'une obligation rémunérée à taux variable, le coupon s'ajuste aux évolutions du marché et par conséquent la cote de l'obligation à taux variable est stable dans le temps.

3) Le problème des intérêts courus et de leur cotation

Principe :

En France le cours (la cote) des obligations est exprimé "**au pied du coupon**" (ou ex-coupon ou coupon détaché ou hors coupon), en % de la valeur nominale.

Autrement dit, la cote d'une obligation est exprimé sans tenir compte des intérêts courus non échus.

Les intérêts courus sont exprimés "à part" et exprimés également en % de la valeur nominale.

Conséquence :

Le prix total d'une obligation (ce qu'un acheteur devra verser pour se la procurer) est donc égale à son cours au pied du coupon + Les intérêts courus non échus.

Remarque

L'usage en France est de calculer les coupons courus sur 365 jours (et non sur 360) et de rajouter 3 jours ouvrés pour tenir compte du délai de livraison des titres à l'acheteur.

Théoriquement, il ne faut donc pas tenir compte des samedis, des dimanches et des jours fériés. Toutefois dans le cadre des examens, vous n'aurez pas un calendrier à votre disposition !

Exemple :

Le 30 septembre 2007, vous disposez des informations suivantes concernant une obligation :

- Valeur nominale : 1 000,00 €
- Remboursable au pair
- Taux nominal : 4,25%
- Taux du marché : 5%
- Date d'échéance : 1^{er} avril de chaque année
- Obligation remboursable in fine le 1^{er} avril 2011.

Questions

- 1) Calculer le montant, en €, du coupon à verser lors de chaque échéance.
- 2) Calculer le prix à payer, le 30 septembre 2007, pour se procurer cette obligation.
- 3) Calculer la cote du coupon couru le 30 septembre 2007.
- 4) Calculer la cote de l'obligation au pied du coupon le 30 septembre 2007.
- 5) Calculer la cote de l'obligation coupon couru (ou coupon attaché).

Réponse

1) Montant du coupon à verser à chaque date d'échéance (chaque 1^{er} avril)

$$\text{Coupon} = 1\,000,00 * 4,25\% = 42,50 \text{ €}$$

2) Prix à payer le 30/09/2007 pour acquérir l'obligation

$$\text{Prix} = 42,50 * (1,05)^{\frac{-180}{365}} + 42,50 * (1,05)^{\frac{-545}{365}} + 42,50 * (1,05)^{\frac{-910}{365}} + 1\,042,50 * (1,05)^{\frac{-1\,275}{365}}$$

$$\text{Prix} = 41,49 + 39,51 + 37,63 + 879,14 = \mathbf{997,77 \text{ €}}$$

Remarque.

Il s'agit bien ici du prix total à payer pour acquérir l'obligation le 30/09/07 ou si vous préférez, le prix coupon attaché de cette obligation.

3) Cote du coupon couru le 30/09/2007

Le coupon couru se calcule du 1^{er} avril 2007 au 30 septembre 2007 et on rajoute 3 jours ouvrés.

$$\text{Coupon couru en €} = 42,50 * (30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 3)/365$$

$$\text{Coupon couru en €} = 42,50 * (186/365)$$

$$\text{Coupon couru en €} = 21,66 \text{ €}$$

$$\text{Cote du coupon couru en \%} = 21,66/1\,000,00$$

$$\text{Cote du coupon couru en \%} = 2,17\%$$

4) Cote de l'obligation au pied du coupon le 30/09/2007

$$\text{Cote en € (au pied du coupon)} = 997,77 - 21,66$$

$$\text{Cote en € (au pied du coupon)} = 976,11 \text{ €}$$

$$\text{Cote au pied du coupon} = 976,11/1\,000,00 = 97,61\%$$

5) Cote de l'obligation coupon couru

$$\text{Cote en \%} = 97,61\% + 2,17\%$$

$$\text{Cote en \%} = 99,78\%$$

Remarque :

Dans un journal financier du 1/10/2007, ces informations seraient présentées ainsi :

Valeurs	Cote en €	Cours du jour en %	Cours précédent	C/C en %	Coupon net €	Date détachement	Date amortissement
4,25 % avril 2011	976,11	97,61%	97,25%	2,17%	21,66	1/04/08	1/04/11

B) Sensibilité d'une obligation

1) Définition de la sensibilité d'une obligation

La sensibilité d'une obligation est le taux de variation du cours de cette obligation pour une variation d'un point du taux d'intérêt du marché.

Remarque :

Ne pas confondre :

- une variation du taux d'un point (ex : le taux passe de 8% à 9%) ;
- une variation du taux de 1 % (ex : le taux passe de 8% à 8,08%) ;
- une variation du facteur d'actualisation du taux de 1% (ex : le facteur passe de 1,08 à 1,0908 et le taux passe de 8% à 9,08%).

2) Expression mathématique de la sensibilité d'une obligation

=> En désignant par :

$$\left. \begin{array}{l} S \Rightarrow \text{La sensibilité ;} \\ C \Rightarrow \text{Le cours de l'obligation ;} \\ \Delta C \Rightarrow \text{La variation du cours ;} \\ r \Rightarrow \text{Le taux du marché ;} \\ \Delta r \Rightarrow \text{La variation du taux (= 1) ;} \end{array} \right\} \Rightarrow S = \frac{\frac{\Delta C}{C}}{\Delta r} = \frac{\Delta C}{\Delta r} * \frac{1}{C} \Rightarrow S = \frac{C'}{C}$$

Avec :

i = Taux nominal

r = Taux du marché le jour du calcul

n = Durée résiduelle de l'emprunt

Remarque

La sensibilité n'est pas homogène puisqu'elle met en rapport un taux d'accroissement (du cours de l'obligation) et un accroissement absolu (du taux d'intérêt).

3) Exemple de calcul de la sensibilité d'une obligation

Reprenons l'exemple précédent où le cours de l'obligation était 990,06 € avec un taux du marché de 6%.

Si le taux montait à 7%, soit une hausse d'un point, le cours descendrait à 963,83 €.

Calcul de la sensibilité en utilisant la définition de la sensibilité

La sensibilité d'une obligation est le taux de variation du cours de cette obligation pour une variation d'un point du taux d'intérêt du marché.

ATTENTION :

Pour calculer un taux de variation, la règle générale est la suivante :

$$\text{Taux de variation} = \frac{\text{Valeur d'arrivée} - \text{Valeur de départ}}{\text{Valeur de départ}} * 100$$

Conséquences :

- On ne va pas trouver exactement la même sensibilité selon que l'on calculera la sensibilité dans le cas où les taux passeraient de 6% à 7% que lorsque les taux passeraient de 7% à 6% ! La différence ne sera pas "énorme" mais elle sera réelle !
- Ce qui est certain en revanche c'est que lorsque les taux augmentent, la cote baisse et inversement. Donc on trouvera une sensibilité positive si les taux baissent ou négative si les taux augmentent. Voilà pourquoi les journaux financiers ne donnent pas le signe de la sensibilité.

Calcul de la sensibilité si les taux passent de 6% à 7%

$$\text{Sensibilité} = \frac{963,83 - 990,06}{990,06} * 100 = - 2,64\%$$

Calcul de la sensibilité si les taux passent de 7% à 6%

$$\text{Sensibilité} = \frac{990,06 - 963,83}{963,83} * 100 = 2,72 \%$$

Signification

Une sensibilité de - 2,64 % signifie que le cours de l'obligation diminue de 2,64 % lorsque le taux d'intérêt du marché augmente d'un point.

Une sensibilité de 2,72 % signifie que le cours de l'obligation augmente de 2,72 % lorsque le taux d'intérêt du marché baisse d'un point.

Calcul de la sensibilité en utilisant la démonstration mathématique

Reprenons toujours le même exemple :

- Si on utilise "t" = 6%

$$\Rightarrow C = 50 (1,06)^{-1} + 50 (1,06)^{-2} + 50 (1,06)^{-3} + 1\,020 (1,06)^{-3}$$

$$\Rightarrow C = 990,06 \text{ € (déjà calculé précédemment)}$$

$$\Rightarrow C' = -1 * 50 * (1,06)^{(-1-1)} - 2 * 50 * (1,06)^{(-2-1)} - 3 * 50 * (1,06)^{(-3-1)} - 3 * 1\,020 * (1,06)^{(-3-1)}$$

$$\Rightarrow C' = [-1 * 50 * (1,06)^{-2}] - [2 * 50 * (1,06)^{-3}] - [3 * 50 * (1,06)^{-4}] - [3 * 1\,020 * (1,06)^{-4}]$$

$$\Rightarrow C' = -50 * (1,06)^{-2} - 100 * (1,06)^{-3} - 150 * (1,06)^{-4} - 3\,060 * (1,06)^{-4}$$

$$\Rightarrow C' = -44,50 - 83,96 - 118,81 - 2\,423,81 = -2\,671,08 \text{ €}$$

Conséquence :

$$\text{Sensibilité} = -2\,671,08 / 990,06 = -2,70$$

- Si on utilise "t" = 7%

$$\Rightarrow C = 50 (1,07)^{-1} + 50 (1,07)^{-2} + 50 (1,07)^{-3} + 1\,020 (1,07)^{-3}$$

$$\Rightarrow C = 963,83 \text{ € (déjà calculé précédemment)}$$

$$\Rightarrow C' = -1 * 50 * (1,07)^{(-1-1)} - 2 * 50 * (1,07)^{(-2-1)} - 3 * 50 * (1,07)^{(-3-1)} - 3 * 1\,020 * (1,07)^{(-3-1)}$$

$$\Rightarrow C' = -1 * 50 * (1,07)^{-2} - 2 * 50 * (1,07)^{-3} - 3 * 50 * (1,07)^{-4} - 3 * 1\,020 * (1,07)^{-4}$$

$$\Rightarrow C' = -50 * (1,07)^{-2} - 100 * (1,07)^{-3} - 150 * (1,07)^{-4} - 3\,060 * (1,07)^{-4}$$

$$\Rightarrow C' = -43,67 - 81,63 - 114,43 - 2\,334,46 = -2\,574,19 \text{ €}$$

Conséquence :

$$\text{Sensibilité} = -2\,574,19/963,83 = -2,67$$

C) Duration

1) Définition et calcul

Soit k, la durée qui sépare l'époque actuelle d'une des échéances futures de l'emprunt (k = 1, 2, 3..., n en désignant par n la durée de vie résiduelle de l'emprunt).

La duration est une moyenne pondérée des durées entre l'époque actuelle et les échéances futures.

Les durées sont pondérées par les flux monétaires (coupons et/ou remboursements) versés aux échéances, ces flux étant actualisés au taux du marché.

En désignant par :

$$\left. \begin{array}{l} D \Rightarrow \text{La duration,} \\ F_k \Rightarrow \text{Le flux de l'échéance de durée } k, \\ r \Rightarrow \text{Le taux du marché,} \\ n \Rightarrow \text{La durée de vie résiduelle de l'emprunt,} \end{array} \right\} \Rightarrow D = \frac{\sum_{k=1}^n k * F_k (1+r)^{-k}}{\sum_{k=1}^n F_k (1+r)^{-k}}$$

Remarque

"Duration" est un mot anglais qui signifie durée.

2) Analogie entre duration et délai de récupération

Exemple.

Calculer, à la date d'émission de l'emprunt :

– la duration d'un emprunt A dont les caractéristiques sont les suivantes : nominal 1 000 € ; taux nominal 7% ; remboursement au pair au bout de 10 ans ; taux du marché 5% ;

– la duration d'un emprunt B dont les caractéristiques sont les suivantes : nominal 1 000 € ; taux nominal 6% ; remboursement au pair au bout de 10 ans ; taux du marché 5%.

Emprunt A			
Durée	Flux	Flux actualisé à 5%	Durée pondérée par le flux actualisé
(a)	(b)	(c)	(d) = (c) * (a)
1	70,00	66,67	66,67
2	70,00	63,49	126,98
3	70,00	60,47	181,41
4	70,00	57,59	230,36
5	70,00	54,85	274,23
6	70,00	52,24	313,41
7	70,00	49,75	348,23
8	70,00	47,38	379,03
9	70,00	45,12	406,10
10	1 070,00	656,89	6 568,87
Total	-	1 154,43	8 895,30
Duration de l'emprunt A $\Rightarrow 8\,895,30 / 1\,154,43 = 7,70 \text{ ans}$			

Emprunt B			
Durée	Flux	Flux actualisé à 5%	Durée pondérée par le flux actualisé
(a)	(b)	(c)	(d) = (c) * (a)
1	60,00	57,14	57,14
2	60,00	54,42	108,84
3	60,00	51,83	155,49
4	60,00	49,36	197,45
5	60,00	47,01	235,06
6	60,00	44,77	268,64
7	60,00	42,64	298,49
8	60,00	40,61	324,88
9	60,00	38,68	348,09
10	1 060,00	650,75	6 507,48
Total	-	1 077,22	8 501,56
Duration de l'emprunt B $\Rightarrow 8\,501,56 / 1\,077,22 = 7,89 \text{ ans}$			

Conséquence.

Bien que les deux emprunts aient la même durée de vie, l'emprunt A possède une duration plus courte.

Cela signifie que le prêteur récupère son capital plus vite, grâce aux coupons plus élevés.

Remarques

1) La notion de duration présente des analogies avec la durée de récupération du capital investi en matière de rentabilité des investissements.

2) La somme des flux actualisés correspond à la cote de l'obligation le jour où l'on fait le calcul de la duration !

3) Relation entre duration et sensibilité

Il existe une relation entre la duration et la sensibilité

$$-S = \frac{D}{1+r} \Rightarrow S = -D * (1+r)^{-1}$$

Démonstration

En désignant le cours du titre par C, rappelons que : $\sum_{k=1}^n F_k (1+r)^{-k} \Rightarrow$ Par conséquent :

$$D = \frac{\sum_{k=1}^n k * F_k (1+r)^{-k}}{\sum_{k=1}^n F_k (1+r)^{-k}} = \frac{\sum_{k=1}^n k * F_k (1+r)^{-k}}{C} \Rightarrow \sum_{k=1}^n k * F_k (1+r)^{-k} = D * C$$

$$\text{La dérivée } \frac{dC}{dr} = \sum_{k=1}^n k * F_k (1+r)^{-k} = \left[\sum_{k=1}^n k * F_k (1+r)^{-k} \right] (1+r)^{-1} = -D * C (1+r)^{-1}$$

$$\text{et comme : } S = \frac{\Delta C}{\Delta r} * \frac{1}{C} \cong \frac{dC}{dr} * \frac{1}{C} \text{ (voir ci-dessus)} \Rightarrow S = -D * C (1+r)^{-1} * \frac{1}{C} = -D * (1+r)^{-1}$$

Exemple

Reprenons l'exemple de l'emprunt A ci-dessus en nous plaçant à l'époque 5.

La durée de vie résiduelle est donc cinq ans.

Nous supposons que le taux du marché est 5%.

- Calcul de la duration

Durée (a)	Flux (b)	Flux actualisé à 5% (c)	Durée pondérée par le flux actualisé (d) = (c) * (a)	Flux actualisé à 6%
1	70,00	66,67	66,67	66,64
2	70,00	63,49	126,98	62,30
3	70,00	60,47	181,41	58,77
4	70,00	57,59	230,36	55,45
5	1 070,00	838,37	4 191,86	799,57
Total	-	1 086,59	4 797,28	1 042,12
Duration = 4 797,28 / 1 086,59 = 4,41 ans				

- Calcul de la sensibilité en fonction de la duration

$$\Rightarrow s = -4,41 * (1,05)^{-1} = -4,2$$

- Vérification du calcul de la sensibilité

Cours de l'obligation pour un taux de marché de 5% \Rightarrow 1 086,59 €

Cours de l'obligation pour un taux de marché de 6% \Rightarrow 1 042,12 €

$$\Rightarrow S = (1 042,12 - 1 086,59) / 1 086,59$$

$$\Rightarrow S = -4,09$$

Remarques

1. Exprimons l'élasticité du cours de l'obligation par rapport au facteur d'actualisation du taux du marché $(1 + r)$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\frac{dC}{C}}{\frac{d(1+r)}{1+r}}}{1+r} = \frac{dC}{dr} * \frac{1+r}{C} = S * (1+r) = -D$$

La duration est, au signe près, égale à l'élasticité du cours de l'obligation par rapport au facteur d'actualisation du taux du marché.

Contrairement à la sensibilité, la duration est homogène ; elle met en rapport deux taux d'accroissement (du cours et du facteur $1 + r$).

2. Le risque de taux, mesuré aussi bien par la sensibilité que par la duration, tend à diminuer à mesure qu'on se rapproche de la fin de l'emprunt.

À la veille du remboursement in fine des obligations, la sensibilité comme la duration sont égales à zéro et le cours de l'obligation est nécessairement égal au prix de remboursement.

Les O.P.C.V.M de trésorerie utilisent cette propriété en composant leurs actifs avec des obligations proches de l'échéance de remboursement, de façon à éviter tout risque de taux à leurs clients.

3. La sensibilité est proportionnelle à la duration
On peut résumer ceci dans le tableau suivant :

		Sensibilité
Duration	Longue	Forte
	Courte	Faible
Taux d'intérêt	Élevés	Faible
	Faibles	Forte

4. Incidence de la sensibilité (et donc de la duration) sur le choix d'un emprunt obligataire, en fonction de l'anticipation sur l'évolution des taux d'intérêt.

- 1^{er} cas - Anticipation d'une baisse des taux d'intérêt

L'investisseur, qui croit en la baisse des taux d'intérêt, souhaite bénéficier de la hausse du cours des obligations qui en résulte.

Or, plus la duration est longue, plus la sensibilité est forte. Pour bénéficier au maximum de la baisse des taux, il faut choisir des obligations dont la duration est la plus longue possible.

Il en est ainsi, à maturité égale, des emprunts remboursables in fine.

- 2^{ème} cas - Anticipation d'une hausse des taux d'intérêt

L'investisseur qui anticipe une hausse des taux, craint que son patrimoine ne diminue en raison de la baisse du cours des obligations.

Il choisira de préférence des emprunts à duration faible tels que les emprunts en fin de vie.

Section 4 – Les risques obligataires

Plusieurs facteurs peuvent avoir une incidence sur le risque supporté par les obligataires.

A) Le risque de taux

Nous avons vu que la valeur d'une obligation évolue en sens inverse des variations de taux d'intérêt.

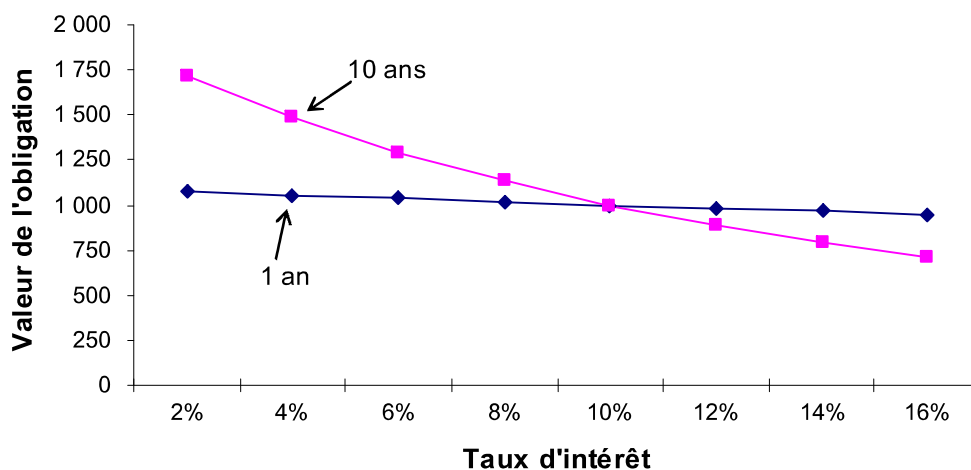
Pour autant, la sensibilité de la valeur d'une obligation à ce paramètre n'est pas la même selon la maturité (date de remboursement) de l'obligation.

Prenons le cas d'une obligation de nominal 1 000 euros, versant un coupon de 10% et calculons sa valeur selon différents taux sur le marché, en distinguant deux cas, selon que l'obligation a une maturité résiduelle de 1 an ou de 10 ans.

Valeur d'une obligation selon sa maturité et le taux d'intérêt

Taux	Valeur de l'obligation	
	1 an	10 ans
2%	1 078,43	1 718,61
4%	1 057,69	1 486,65
6%	1 037,74	1 294,40
8%	1 018,52	1 134,20
10%	1 000,00	1 000,00
12%	982,14	887,00
14%	964,91	791,36
16%	948,28	710,01

Valeur d'une obligation selon sa maturité et le taux d'intérêt



On observe sur ce graphique que deux obligations ayant le même nominal (1 000) et versant le même coupon (100) vont réagir différemment à l'évolution des taux sur le marché.

Plus la maturité de l'obligation est grande, plus l'obligation est sensible aux variations de taux d'intérêt.

Graphiquement, cela se traduit par une courbe de valeur plus pentue.

Une mesure du degré d'exposition de l'obligation au risque de taux est donnée par la durée de l'obligation, qui correspond à sa maturité moyenne pondérée.

C'est ce que nous avons vu précédemment.

B) Le risque de crédit

Le détenteur d'une obligation, en plus du risque de taux, fait face à un risque de crédit.

Ce risque de crédit peut prendre trois formes : le risque de défaut, de spread et de dégradation.

1) Le risque de défaut.

Il correspond au cas où l'émetteur ne paie pas les coupons et/ou le prix de remboursement à la date qui était prévue.

En cas de liquidation, les obligataires seront remboursés avant les actionnaires et recevront, selon la valeur des actifs disponibles de l'émetteur, tout ou partie des sommes dues.

2) Le risque de spread.

Le rendement qui est attendu d'une obligation dépend de deux facteurs :

- le taux des emprunts d'État
- une prime de risque dont l'objet est de compenser la prise de risque liée à l'investissement obligataire.

Cette prime de risque est appelée spread.

Si le risque associé à la détention de l'obligation change, le spread exigé par le marché sera ajusté en conséquence, ce qui modifiera la valeur de l'obligation, toutes choses égales par ailleurs.

Ce sera, par exemple, le cas lorsque la performance économique de la société s'avère nettement moins bonne que ce qui était prévu.

Dans cette situation, le spread augmente si le risque est accru, ce qui fait baisser le cours de l'obligation.

3) Le risque de dégradation.

Lors de certaines émissions obligataires, l'émetteur peut demander à une agence de notation de noter sa solidité financière.

Une fois l'émission réalisée, il est possible à l'agence de revoir la note attribuée.

Si la note est abaissée (on dit qu'elle est dégradée), le taux de rendement exigé par les investisseurs est revu à la hausse ce qui, mécaniquement, fait baisser le cours de l'obligation.

C) La notation des emprunts obligataires

La notation consiste à apprécier le risque de défaut de l'émetteur de l'obligation et, par là même, la probabilité de non remboursement de cette dernière.

Le marché de la notation est occupé principalement par trois agences : Moody's, Standard & Poor's et FitchRating.

En fonction d'un certain nombre de critères, ces agences de notation (de rating) vont attribuer une note sous la forme d'une lettre (AAA par exemple) à l'emprunt émis.

La notation n'est pas obligatoire et ne se rencontre, compte tenu de son coût, qui est à la charge de l'émetteur, que dans le cas de levées de fonds conséquents.

La note attribuée est importante car elle détermine le taux auquel l'émission obligataire peut être réalisée.

Plus précisément, elle détermine la prime (on parle de spread) à ajouter au taux sans risque pour obtenir le taux de rendement exigé par le marché.

En avril 2004, ce spread pour les entreprises industrielles souhaitant s'endetter sur 10 ans était de 0,31% pour les mieux notées (AAA) et de 8,25% pour les moins bien notées (B-).

Une fois que l'émission est notée et réalisée, l'agence a toujours la possibilité de revoir à la hausse ou à la baisse (dégradation) la note qu'elle a attribuée.

Section 5 – Détermination du prix d'émission théorique d'une obligation

A) Principe

Le prix d'émission d'un emprunt obligataire doit donc être égal en théorie aux flux actualisés qu'il entraîne.

Le taux d'actualisation doit refléter l'équilibre actuel du marché financier.

Il faut donc actualiser chacun des flux jusqu'à l'échéance aux taux spots (taux du marché au comptant).

Chaque flux est donc actualisé avec un taux spot différent.

Remarque.

Pour calculer le prix d'émission d'une obligation, on peut raisonner sur la totalité de l'emprunt mais il est plus simple et plus rapide de raisonner sur un nombre réduit d'obligations.

En cas de remboursement par amortissement constant sur cinq ans par exemple, on raisonnera sur cinq obligations (une obligation remboursée par an).

En cas de remboursement in fine au bout de cinq ans par exemple, on raisonnera sur une obligation.

En cas de remboursement par cinq annuités constantes par exemple, on raisonnera sur cinq obligations (ou sur une seule obligation).

B) Calcul des taux spot

Dans les cas pratiques, deux cas pourront se rencontrer :

- 1^{er} cas - L'énoncé vous fournit les taux spots

Dans ce cas, pas de problème !

Chaque flux sera actualisé au taux spot concerné :

=> Flux de la fin 1, actualisé en 0, au taux spot à 1 an

=> Flux de la fin 2, actualisé en 0, au taux spot à 2 ans

=> Flux de la fin n, actualisé en 0, au taux spot à "n" ans

- 2^{ème} cas - L'énoncé ne vous fournit pas les taux spots

Dans ce cas, il vous fournira l'évolution des taux d'intérêts annuels à venir et il vous faudra donc calculer les taux spot à 1 an, 2 ans ...

Exemple.

Aujourd'hui, les taux spot à un an sont de 4% et devraient augmenter de 0,5 par an (courbe de taux ascendante).

Calculer les taux spot à 2 ans, 3 ans.

Réponse.

Le taux spot à 2 ans est égal à la moyenne des taux des deux prochaines années.

=> Taux spot à 2 ans = $(4\% + 4,5\%)/2 = 4,25\%$

Le taux spot à 3 ans est égal à la moyenne des taux des trois prochaines années.

=> Taux spot à 3 ans = $(4\% + 4,5\% + 5\%)/3 = 4,50\%$

C) Application

Un emprunt obligataire doit être émis le 1^{er} avril 2007.

Valeur nominale d'une obligation : 2 500 €.

Maturité 3 ans (il s'agit bien sur ici d'un "cas d'école", en effet, dans la réalité, la durée serait plus proche des 10 ans !).

Remboursement in fine au pair.

Taux facial = 3,5%.

Les taux spot à 1 an, 2 ans et 3 ans sont respectivement les suivants : 3,25%; 3,75%; 4,25%.

Question.

Déterminez le prix d'émission théorique d'une obligation.

Réponse

Intérêt annuel = $2\,500 * 0,035 = 87,5$

Prix d'émission = $87,5 * (1,0325)^{-1} + 87,5 * (1,0375)^{-2} + 2\,587,50 * (1,0425)^{-3}$

Prix d'émission = $84,75 + 81,29 + 2\,283,77$

Prix d'émission = 2 449,81 €