

Chapitre 1

La valeur et le temps

1 Exercice 01-16

Échéance commune de plusieurs effets

- **Définition.** L'échéance commune de plusieurs effets est l'échéance d'un effet unique qui, le jour de l'équivalence, a une valeur actuelle égale à la somme des valeurs actuelles des effets considérés.
- **Le cas.** Un effet de 1 200 € remplace les trois effets suivants :
 - effet A de 500 €, échéance 20 jours ;
 - effet B de 300 €, échéance 40 jours ;
 - effet C de 390 €, échéance 60 jours.Taux d'escompte 8 %.

Déterminer l'échéance commune de ces trois effets.

2 Corrigé de l'exercice 01-16

Désignons l'échéance commune par n . Écrivons l'équation d'équivalence entre l'effet unique de 1 200 € et les trois autres effets.

$$1\,200 - 1\,200 \times 8\% \times \frac{n}{360} = 500 - 500 \times 8\% \times \frac{20}{360} + 300 - 300 \times 8\% \times \frac{40}{360} + 390 - 390 \times 8\% \times \frac{60}{360} \Rightarrow 1\,200 - 0,266n = 1\,179,91 \Rightarrow n = 75 \text{ jours}$$

3 Exercice 01-17

Échéance moyenne de plusieurs effets

- **Définition.** L'échéance moyenne de plusieurs effets est le cas particulier de l'échéance commune (voir exercice 01.16) où le nominal de l'effet unique est égal à la somme des valeurs nominales des autres effets considérés.
- **Le cas.** On considère trois effets :
 - effet A de 200 €, échéance 30 jours ;
 - effet B de 400 €, échéance 45 jours ;
 - effet C de 100 €, échéance 60 jours.Pour mémoire, le taux d'escompte est désigné par t .

Déterminer l'échéance moyenne de ces trois effets.

4 Corrigé de l'exercice 01-17

Calcul du nominal de l'effet unique :

$$200 + 400 + 100 = 700 \text{ €}$$

Détermination de l'échéance moyenne n :

$$700 - 700 \times t \times \frac{n}{360} = 200 - 200 \times t \times \frac{30}{360} + 300 - 300 \times t \times \frac{45}{360} + 100 - 100 \times t \times \frac{60}{360}$$

Simplifions en retranchant 700 aux deux membres de l'équation et en divisant les deux membres par $\frac{t}{360}$. Après simplification, l'équation devient :

$$700 n = 200 \times 30 + 400 \times 45 + 100 \times 60 = 30\,000 \Rightarrow n = 43 \text{ jours}$$

Remarque : L'échéance moyenne de plusieurs effets est indépendante de la valeur du taux d'escompte t puisque celui-ci est éliminé dans les calculs.

5 Exercice 01-18

Intérêts composés – Équivalence des capitaux

On désire se constituer un capital de 15 000 € le 31 décembre 2020. On place 5 000 € le 1^{er} janvier 2008 et 3 000 € le 31 décembre 2010. Taux 6,5 %.

1. Quelle somme pourrait-on retirer le 31 décembre 2015 tout en laissant intact le capital final au 31 décembre 2020 ?
2. Si l'on n'avait pas retiré la somme mentionnée à la question 1, à quelle date aurait-on disposé des 15 000 € désirés ?

6 Corrigé de l'exercice 01-18

1. Écrivons l'équation d'équivalence au 31.12.2020.

$$5\,000 \times 1,065^{13} + 3\,000 \times 1,065^{10} - x \times 1,065^5 = 15\,000 \Rightarrow 16\,968,85 - 1,37 x = 15\,000 \\ \Rightarrow 1\,968,85 = 1,37 x \Rightarrow x = 1\,437,03 \text{ €}.$$

2. Écrivons l'équation d'équivalence au 31.12.2010.

$$5\,000 \times 1,065^3 + 3\,000 = 15\,000 \times 1,065^{-n} \Rightarrow 9\,039,75 = 15\,000 \times 1,065^{-n} \Rightarrow 1,065^{-n} = 0,6026$$

L'équation logarithmique équivalente est :

$$-n \log 1,065 = \log 0,6026 \Rightarrow -0,02735 n = -0,22 \Rightarrow n \approx 8 \text{ ans}$$

7 Exercice 01-19

Annuités de capitalisation

Un groupe pétrolier constitue une réserve de trésorerie pour faire face à ses obligations de démantèlement des plates-formes pétrolières. Il prévoit d'effectuer les placements successifs suivants :

1.01.2008	600 millions d'euros	1.01.2011	900 millions d'euros
1.01.2010	360 millions d'euros		

1. Ces placements étant effectués au taux annuel de 7,5 %, quelle sera la réserve constituée le 1^{er} janvier 2012 ?

2. Quel est le montant de chacun des versements qu'il faudrait effectuer du 1.05.2008 au 1.01.2012 inclus pour obtenir la réserve trouvée à la question 1 ?

8 Corrigé de l'exercice 01-19

1. $600 \times 1,075^4 + 360 \times 1,075^2 + 900 \times 1,075 = 2\,184,81$ millions d'euros.

2. Taux équivalent : $1,075^{1/3} - 1 = 0,0244$

Nombre de versements : $3 \times 4 = 12$

$$a = 2\,184,81 \frac{0,0244}{1,0244^{12} - 1} = 158,91 \text{ millions d'euros}$$

9 Exercice 01-20

Annuités de remboursement

Une personne désire obtenir un prêt de 100 000 € sur 15 ans en vue de compléter le financement de l'achat de sa maison. Pour cela, elle consulte deux établissements financiers qui lui proposent les conditions suivantes :

- *Établissement A.* Remboursements mensuels constants de 106 € par tranche de 10 000 € emprunté (les remboursement auraient lieu au début de chaque mois.)
- *Établissement B.* Remboursements annuels constants de 12 042,05 € pour 100 000 € de prêt accordé.

1. Déterminer à première vue, sur une période de douze mois, l'établissement le plus avantageux (le client voudrait une réponse immédiate, même approximative).

2. Afin de procéder à une comparaison plus précise, déterminer l'annuité constante que devrait placer cette personne chaque mois pour faire face à chaque échéance annuelle de 12 032,72 € (les placements auraient lieu en début de période du 1^{er} janvier au 1^{er} décembre ; taux 5,25 %, intérêts simples).

3. Quelle est la valeur actuelle de l'économie qui résulte du choix du procédé le plus avantageux ? Cette économie est actualisée sur la durée de l'emprunt à intérêts composés au taux annuel de 2 %, taux de dépréciation supposé du pouvoir d'achat eu égard à l'inflation.
4. Quel est le taux annuel de l'emprunt auprès de l'établissement B (le premier remboursement ayant lieu un an après l'obtention du prêt) ?
5. Quel est le taux annuel de revient réel pour le client, sachant que celui-ci verse des mensualités constantes capitalisées comme il est indiqué à la question 2 ?

10 Corrigé de l'exercice 01-20

1. Comparaison approximative

12 remboursements mensuels de 1 060 € = 12 720 € comparés à un remboursement annuel de 12 032 €. À première vue, l'établissement B paraît plus avantageux, d'autant plus que les remboursements mensuels sont effectués plus tôt que le versement annuel.

2. Montant des placements mensuels

Désignons par a ce montant.

Valeur acquise des placements : $12 a + a \times 0,0525 \times 12/12 + a \times 0,0525 \times 11/12 + \dots + a \times 0,0525 \times 1/12 = a \times 0,0525 \times 1/12 \times (12 + 11 + 10 + \dots + 1) = 12 a + a \times 0,0525 \times 1/12 \times 78 = 12,34125 a$

Équivalence des versements mensuels et du versement annuel :

$$12,34125 a = 12\,032,72 \Rightarrow 975 \text{ €}.$$

3. Valeur actuelle de l'économie

Économie mensuelle : $1\,060 - 975 = 85 \text{ €}$

Taux mensuel équivalent à 2 % annuel : $1,02^{1/12} - 1 = 0,0016516$.

Nombre de mois : $12 \times 15 = 180$

$$\text{Valeur actuelle : } V_0 = 85 \frac{1 - 1,0016516^{-180}}{0,0016516} = 13\,226 \text{ €}$$

4. Taux de l'emprunt B

$$100\,000 = 12\,032,72 \frac{1 - (1 + i)^{-15}}{i}$$

- Solution par essais et interpolation

$$\text{Essai à 8 \%} \rightarrow 12\,032,72 \frac{1 - 1,08^{-15}}{0,08} = 102\,993,81$$

$$\text{Essai à 9 \%} \rightarrow 12\,032,72 \frac{1 - 1,09^{-15}}{0,09} = 96\,992$$

$$\text{Interpolation} \rightarrow i = 8 \% + 1 \% \times \frac{2\,993,81}{102\,993,81 - 96\,992} = 8 \% + 0,498 \% = 8,498 \%$$

- Solution par le tableur

La fonction =TAUX (15 ; -12032,72 ; 100000) donne 8,487 %

5. Taux de revient pour le client

$$100\,000 = 975 \frac{1 - (1 + i_m)^{-180}}{i_m}$$

- Recherche du taux mensuel par essais et interpolation

$$\text{Essai à 0,5 \%} \rightarrow 975 \frac{1 - 1,005^{-180}}{0,005} = 115\,541$$

$$\text{Essai à 1 \%} \rightarrow 975 \frac{1 - 1,01^{-180}}{0,01} = 81\,239$$

$$\text{Interpolation} \rightarrow i = 0,5 \% + 0,5 \% \times \frac{15\,541}{115\,541 - 81\,239} = 0,5 \% + 0,2265 \% = 0,7265 \%$$

- Recherche du taux mensuel par le tableur

La fonction =TAUX (180 ; -975 ; 100000) donne 0,694 %

En retenant, ce dernier résultat, le taux annuel équivalent est égal à $1,00694^{12} - 1 = 8,65 \%$.

Ce taux revient est légèrement supérieur au taux de l'emprunt parce que les versements mensuels du client sont placés à un taux (5,25 %) qui est inférieur au taux de l'emprunt.